گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

هندسه ۲

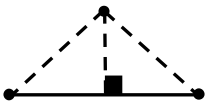
(فصل ۱- مباحث غیرمشترک با هندسه ۱)

تذکر: مباحث مشترک مثل خواص مثلث و چندضلعی‌ها و اشکال خودمتشابه قبلاً تقدیم شده است.

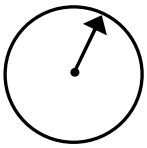
مکان هندسی:

مکان هندسی مجموعه نقطه‌هایی از صفحه یا فضا است که دارای ویژگی معینی هستند، یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که این ویژگی را دارد عضو آن مجموعه می باشد.

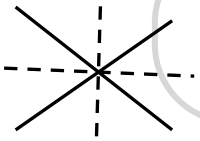
چند مکان هندسی مهم:



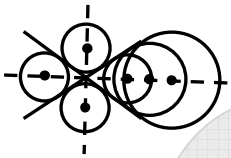
مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از دو نقطه ثابت A و B به یک فاصله‌اند، عمود منصف پاره‌خط AB است. (این مکان در فضا صفحه عمودمنصف پاره‌خط AB است.)



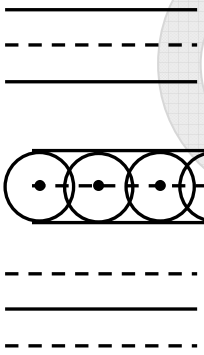
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه‌ی A به فاصله معلوم R باشند دایره‌ای به مرکز A و شعاع R است. (این مکان در فضا کره‌ای به مرکز A و شعاع R است.)



مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از دو خط متقاطع به یک فاصله‌اند، دو خط متقاطع عمود بر هم (نیمساز زوایا) است. (این مکان درفضا دو صفحه متقاطع عمود بر هم است.)



نتیجه: مکان هندسی مراکز دوایری در یک صفحه، که بر دو خط متقاطع مماسند، دو خط متقاطع عمود بر هم (نیمساز زوایا) است.



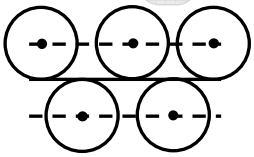
مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از دو خط موازی به یک فاصله‌اند، یک خط بین دو خط و به موازات آن دو و به فاصله‌ی مساوی از آنهاست. (این مکان درفضا یک صفحه بین دو خط و به موازات آن دو و به فاصله‌ی مساوی از آنها وعمود بر صفحه‌ی دو خط است.)

نتیجه: مکان هندسی مراکز دوایری در یک صفحه، که بر دو خط موازی مماسند، یک خط بین دو خط و به موازات آن دو و به فاصله‌ی مساوی از آنهاست.

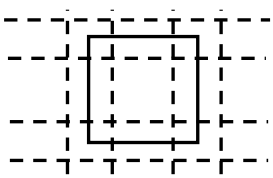
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط مفروض d با فاصله معلوم a هستند، دو خط موازی با خط d می‌باشد. (این مکان در فضا سطح جانبی استوانه‌ای با محور d و شعاع قاعده a است.)

نتایج:

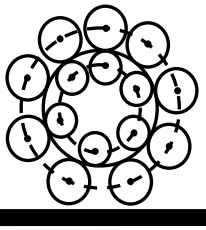
الف) مکان هندسی مراکز دوایری به شعاع معلوم در یک صفحه، که بر یک خط مستقیم مماسند، دو خط موازی با خط مفروض است.



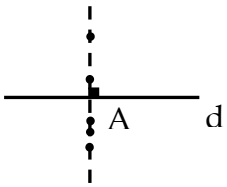
ب) مربعی به ضلع L مفروض است. مکان هندسی نقاطی داخل صفحه مربع که فاصله آنها حداقل از یک ضلع مربع مساوی L' است، شکل مقابل است.



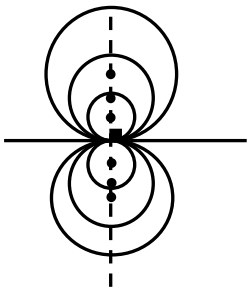
مکان هندسی مراکز دوایری به شعاع معلوم در یک صفحه، که بر دایره مفروض مماسند دو دایره به شعاعهای $R+R', |R-R'|$ است.



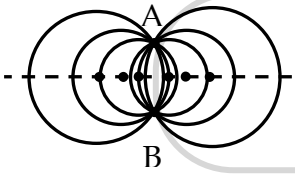
۷- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می توان عمودی گذرنده از نقطه‌ی A واقع بر خط d بر آن خط رسم کرد، خطی است عمود بر خط d در نقطه‌ی A.



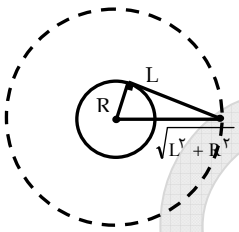
نتیجه: مکان هندسی مراکز دوایری در یک صفحه که در نقطه معلوم A بر خط معلوم d مماسند، یک خط مستقیم عمود بر آن خط مفروض است.



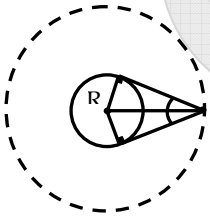
مکان هندسی مرکز دوایری که از دو نقطه ثابت A و B می‌گذرد، عمود منصف پاره‌خط AB است.



۹- مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط مماسهایی به طول معلوم L بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R می‌توان رسم کرد، دایره‌ای به شعاع $\sqrt{R^2+L^2}$ و به مرکز نقطه‌ی O است.

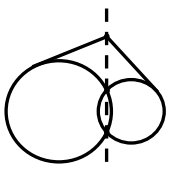


مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می توان دو مماس که با هم زاویه α بسازند بر دایره‌ای به شعاع R رسم کرد دایره‌ای به مرکز دایره مفروض و با شعاع $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ می‌باشد.

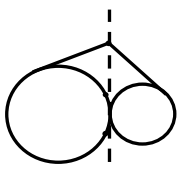


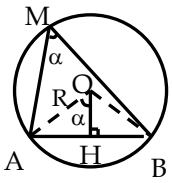
حالت خاص: مکان هندسی نقاطی که از آن نقاط می توان دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ای به شعاع R رسم کرد دایره‌ای به مرکز دایره مفروض و با شعاع $R\sqrt{2}$ می‌باشد. (این دایره اصطلاحاً **دایره‌ی مونژ** نام دارد.)

۱۱- امتداد وتر مشترک دو دایره متقاطع، مکان هندسی نقاطی است که از آن نقاط می‌توان دو مماس مساوی بر دو دایره رسم کرد.

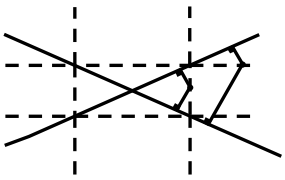


۱۲- مماس مشترک داخلی دو دایره مماس خارج، مکان هندسی نقاطی است که از آن نقاط می‌توان دو مماس مساوی بر دو دایره رسم کرد.





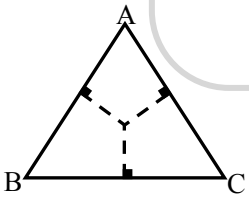
۱۳- مکان هندسی رأس زاویه‌ای برابر α که ضلعهایش از دو نقطه ثابت می‌گذرند، کمانهایی از دو دایره‌ی مساوی است که از آن دو نقطه‌ی ثابت می‌گذرند و زاویه‌ی مرکزی رو به رو به وتر مشترک آنها برابر 2α است. این کمان، کمان در خور زاویه‌ی α نامیده می‌شود. در واقع مکان هندسی نقاطی که پاره خط AB را به زاویه‌ی α رویت می کنند دو کمان از دایره است.



۱۴- مکان هندسی نقاطی از صفحه که مجموع فواصل هر یک از آنها از دو خط متقاطع d', d ثابت باشد مستطیلی است که دو قطر آن منطبق بر خطوط d', d می‌باشد. مکان هندسی نقاطی که تفاضل فواصل هر یک از آنها از دو خط متقاطع d', d مقداری ثابت باشد، امتداد اضلاع یک مستطیل است که دو قطرش بر d', d منطبق می‌باشد.

مثال: در مثلث ΔABC دو رأس B و C ثابت و رأس A در صفحه مثلث تغییر می‌کند، مکان هندسی مرکز دایره محیطی مثلث کدام است؟

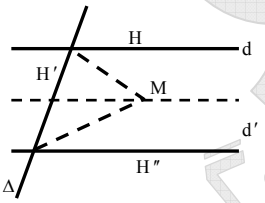
حل:



چون مرکز دایره محیطی محل برخورد عمود منصفهای مثلث است و یکی از این عمودمنصف‌ها عمودمنصف پاره خط ثابت **BC** است. پس مکان مطلوب همان عمودمنصف **BC** خواهد بود.

مثال: دو خط ثابت d و d' متوازیند، خط متغیر Δ آنها را قطع نموده است. مکان هندسی نقطه تلاقی نیمسازهای دو زاویه مقابل داخلی کدام است؟

حل:

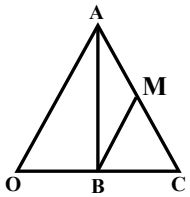


$$\begin{matrix} MH = MH' \\ MH' = MH'' \end{matrix} \Rightarrow MH = MH''$$

پس نقطه متغیر همواره از دو خط به یک فاصله است و مکان هندسی آن خطی موازی با **d** و **d′** و به یک فاصله از آن‌هاست.

مثال: در مثلث ΔABC دو رأس B و C ثابت و رأس A در صفحه مثلث طوری تغییر می‌کند که طول میانه ضلع AC همواره مقداری ثابت است. مکان هندسی رأس A کدام است؟

حل:

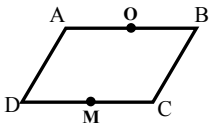


اگر **BC** را به اندازه خودش تا نقطه **O** از طرف B ادامه دهیم و از **O** به **A** وصل کنیم، اولاً نقطه **O** یک نقطه ثابتی است. ثانیاً در مثلث **ΔOAC** داریم **OA = ۲BM**، چون **BM** ثابت است پس **OA** ثابت است. یعنی نقطه متغیر **A** همواره از نقطه ثابت **O** به فاصله ثابتی قرار دارد. لذا مکان هندسی دایره‌ای است به مرکز **O**.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: در متوازی الاضلاع ABCD دو رأس A و B ثابت و دو رأس C و D چنان تغییر می‌کنند که AD مقداری ثابت است. مکان هندسی وسط CD کدام است؟

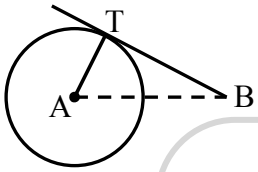
حل:



اگر **AD** ثابت باشد، **OM** نیز ثابت است. لذا مکان هندسی دایره‌ای است به مرکز وسط **AB**.

مثال: دو نقطه ثابت A و B مفروضند. از نقطه B مماس BT را بر دوایری به مرکز A و به شعاع متغیر R $(R < AB)$ رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ی T کدام است؟

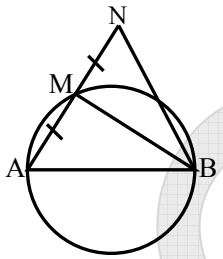
حل:



چون $\hat{ATB}$ همواره ۹۰° است لذا رو به قطر **AB** است. لذا جواب دایره‌ای است به مرکز وسط **AB** و قطر **AB**.

مثال: دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطه A به نقطه M از دایره وصل کرده و آنرا به اندازه‌ی AM تا نقطه N امتداد می‌دهیم. مکان هندسی نقطه N با تغییر نقطه M بر روی دایره، کدام است؟

حل:

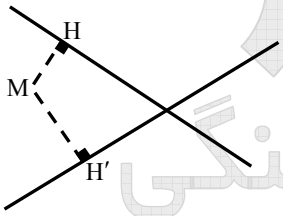


$$\Delta ABM = \Delta BMN \Rightarrow AB = BN$$

چون $AB = BN$، لذا **BN** با تغییر **M** ثابت است. لذا مکان هندسی دایره‌ای است به مرکز **B**.

مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فواصلشان از دو خط متقاطع مقدار ثابتی باشد، کدام است؟

حل:



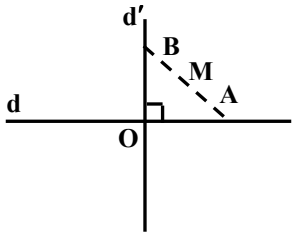
ابتدا نقطه دلخواه $M = (X, Y)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض مسأله داریم:

$$\frac{|MH|}{|MH'|} = k \Rightarrow \frac{aX + bY + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm k \frac{a'X + b'Y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

که معادله دو خط متقاطع می باشد.

مثال: پاره خط AB به طول ۱۰ سانتیمتر است و دو سر آن روی دو خط عمود بر هم d و d' تغییر مکان می دهند، مکان هندسی نقطه M وسط AB کدام است؟

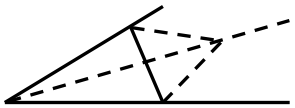
حل:



چون میانه وارد بر وتر نصف وتر است و طول وتر همواره برابر ۱۰ است، فاصله‌ی نقطه‌ی M از مبدأ مختصات همواره برابر ۵ است. پس مکان M دایره‌ای است به مرکز مبدأ و شعاع ۵.

مثال: زاویه ثابت xAy مفروض است. اگر نقطه B روی نیم خط Ax و نقطه C روی نیم خط Ay تغییر مکان دهند، مکان هندسی نقطه برخورد نیمسازهای خارجی دو زاویه B و C از مثلث ABC کدام است؟

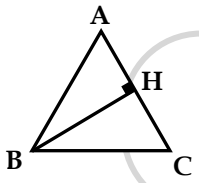
حل:



چون همواره سه نیم‌ساز هم‌رأسند و این نقطه‌ی همرسی یکی از نقاط نیم‌ساز زاویه‌ی xAy است و این خط، خط ثابتی است پس با تغییر دو نیم‌ساز خارجی نقاط مختلف نیم‌ساز زاویه‌ی xAy تولید می‌شود.

مثال: در مثلث ABC دو راس B و C ثابت و راس A در صفحه مثلث تغییر مکان می دهد. مکان هندسی پای ارتفاع نظیر رأس B کدام است؟

حل:



چون نقطه‌ی H پاره‌خط BC را همواره با زاویه‌ی ۹۰° رؤیت می‌کند، لذا مکان هندسی نقطه‌ی H دایره‌ای است به قطر BC.

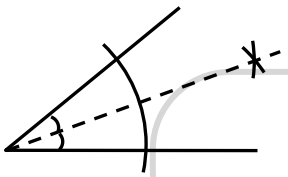
مؤسسه آموزشی فرهنگی

ترسیمات هندسی:

برای ترسیمات هندسی به کمک خط کش غیر مدرج و پرگار، ابتدا مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، سپس مسأله ترسیم را تبدیل به یافتن یک نقطه مجهول می‌کنیم، شرطهای مسأله را به دو جزء تقسیم می‌کنیم به طوری که هر کدام از شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول تبدیل شود، نقطه مجهول فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

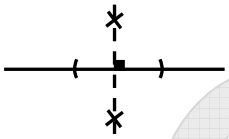
ترسیم مکانهای هندسی مهم:

رسم نیمساز یک زاویه:



برای رسم نیمساز یک زاویه، پرگار را به اندازه دلخواهی باز نموده و سر آن را روی رأس زاویه قرار می دهیم و کمان می زنیم تا اضلاع زاویه را قطع کند. سپس مجدداً پرگار را به اندازه دلخواهی باز کرده و از نقاط تقاطع دو کمان دیگر رسم می کنیم تا یکدیگر را قطع کنند. خطی که از نقطه تقاطع دو کمان به رأس زاویه وصل می‌شود، نیمساز زاویه است.

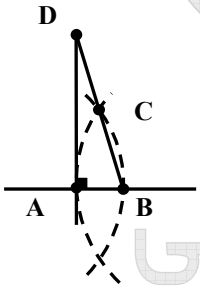
رسم عمود منصف یک پاره خط:



برای رسم عمود منصف یک پاره خط، دو کمان مساوی از دو سر آن پاره خط در بالا و پایین پاره خط می‌زنیم، این دو کمان در بالا در یک نقطه و در پایین نیز در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کنند. خط واصل بین این دو نقطه، عمود منصف پاره خط مفروض است.

تذکر: از روش فوق می توان برای **رسم خطی عمود بر خط داده شده از نقطه ای روی آن** نیز بهره گرفت.

روش ابوالوفاء بوزجانی برای رسم خطی عمود بر خط داده شده از نقطه ای روی آن:



برای رسم خط عمود از نقطه‌ی A واقع بر خط مفروض d ابتدا نقطه‌ی B را روی d اختیار می کنیم.دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی پاره خط AB باز می کنیم دو دایره به مرکزهای A وB و به شعاع AB رسم می کنیم. یک نقطه‌ی برخورد این دو دایره را C می نامیم. از B به C وصل می کنیم و پاره خط BC را از طرف نقطه‌ی C به اندازه‌ی خودش تا نقطه‌ی D ادامه می دهیم. از D به A وصل می کنیم. خط AD در نقطه A بر خط d عمود است.

مثال: روش ابو الوفاء بر اساس کدام قضیه‌ی زیر استوار است؟

۱) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود است.

۲) اگر در مثلثی میانه‌ی وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع بود، مثلث قائم الزاویه است.

۳) در مثلث متساوی الاضلاع زاویه های داخلی ۶۰ درجه اند.

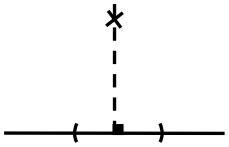
٤) زاویه‌ی محاطی مقابل به قطر در دایره ۹۰است.

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

چون ابوالوفا AB و AC و BC را مساوی در نظر می گیرد، تصمیم در ساختن مثلث متساوی الاضلاع دارد. لذا چون AC و CD با هم مساویند هر زاویه‌ی غیر مجاور مثلث ACD برابر ۳۰ درجه است. لذا در مثلث ABD یک زاویه ۶۰ و یک زاویه ۳۰ است، پس زاویه‌ی سوم ۹۰ درجه است. البته در مورد روش ابوالوفا گزینه‌ی ۲ هم صادق است اما منظور نظر ابوالوفا نبوده والّا نمی‌گفت AB و AC و BC مساوی باشند.

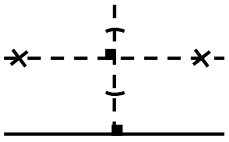
مؤسسه آموزشی فرهنگی

۳- رسم خطی عمود بر خط داده شده از نقطه‌ای خارج آن:



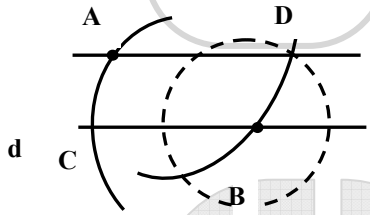
برای رسم خط عمود بر خط داده شده از نقطه‌ای خارج آن، ابتدا یک کمان از نقطه خارج خط، رسم می‌کنیم به نحوی که خط را در دو نقطه قطع کند. حال عمود منصف پاره خط قرار گرفته بین دو نقطه را به روش مثال قبل، رسم می‌کنیم.

٤- رسم خطی موازی یک خط، از نقطه‌ای خارج آن:



برای رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج از آن، ابتدا از آن نقطه بر خط مفروض عمودی رسم می‌کنیم (با روش مثال قبل) سپس از نقطه مفروض یک عمود بر خط عمود شده بر پاره خط مفروض رسم می‌کنیم به این ترتیب که از نقطه مورد نظر دو کمان مساوی در دو طرف می‌زنیم تا خط عمود را در دو نقطه قطع کند. عمود منصف (عمود از نقطه‌ای روی خط بر خط) پاره خط قرار گرفته بین دو کمان، خطی موازی خط اولیه است.

روش ابوالوفاء بوزجانی برای رسم خطی موازی یک خط از نقطه‌ای خارج از آن:



خط d و نقطه‌ی A خارج آن داده شده است. برای رسم خطی به موازات d از نقطه‌ی A نقطه‌ی دلخواه B را روی d اختیار کرده و دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB می گشاییم. به مرکز B وشعاع AB یک دایره رسم می کنیم تا خط d را در نقطه‌ی C قطع کند. آنگاه به مرکز A و با همان شعاع قبلی دایره‌ی دیگری رسم می کنیم. سپس به مرکز B وشعاعی برابر AC دایره‌ی دیگری رسم می کنیم و نقطه‌ی برخورد دو دایره به مرکزهای A و B را D می نامیم. از A به D وصل می کنیم. AD خطی است که از A به موازات d رسم می‌شود.

مثال: روش ابو الوفاء بر اساس کدام قضیه‌ی زیر استوار است؟

۱) میانه‌ی وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه نصف وتر است.

۲) خط مماس بر دایره در نقطه‌ی تماس بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود است.

۳) و اگر اضلاع مقابل یک چهارضلعی دوبدو مساوی باشند، آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

٤) نیمساز زاویه‌ی خارجی زاویه‌ی رأس مثلث متوازی الساقین موازی قاعده است.

حل: گزینه ۳ پاسخ است.

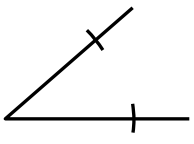
در واقع ابوالوفا AC را مساوی BD و AD را مساوی BC رسم می‌کند. و اگر اضلاع مقابل یک چهارضلعی دوبدو مساوی باشند آن چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۵- رسم مثلثی که سه ضلعش معلوم است:



برای رسم مثلثی که سه ضلعش معلوم است ابتدا پاره خطی به اندازه یکی از اضلاع معلوم رسم می کنیم و سپس به وسیله پرگار دو کمان به اندازه دو ضلع دیگر از دو سر آن پاره خط رسم می‌نماییم. محل تلاقی دو کمان رأس سوم مثلث است.

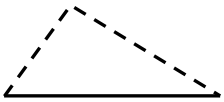
٦- رسم مثلثی که دو ضلع و زاویه بین آن دو ضلعش معلوم است:



ابتدا زاویه را رسم سپس روی دو ضلع آن به اندازه‌ی دو ضلع داده شده کمان می زنیم و انتهای دو کمان را بهم وصل می کنیم.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

۷- رسم مثلثی که دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه معلوم است:



ابتدا ضلع را رسم و سپس از دو سر آن به اندازه‌ی زاویه های داده شده جدا کرده و ضلع دوم این دو زاویه را بهم وصل می‌کنیم.

حالات رسم مثلث:

به طور کلی برای رسم یک n ضلعی باید $\mathbf{2n-3}$ جزء مستقل از یک‌دیگر n ضلعی معلوم باشد. بنابراین برای رسم یک مثلث باید سه جزء مستقل از هم معلوم باشد، به عنوان مثال سه زاویه‌ی مثلث سه جزء مستقل از هم محسوب نمی‌شوند، چون با معلوم بودن دو تا از آن‌ها سومی نیز معلوم می‌شود ولی سه ضلع مستقل از هم هستند. البته مسأله‌های مربوط به رسم مثلث بسیار زیاد و متنوع هستند و برای حل آن‌ها قضیه‌های بسیاری از هندسه مورد استفاده قرار می‌گیرد، به همین دلیل نمی‌توان روش کلی برای حل آن‌ها بیان کرد.

در واقع در بحث ترسیم مثلث با دو نوع سؤال مواجهیم:

۱- آیا این با داشتن این اجزا می توان مثلث را رسم کرد یا نه؟ یعنی آیا این اطلاعات برای رسم مثلث کافی است؟

۲- اگر این اجزا برای رسم مثلث کافی است، با این اعداد چند مثلث متمایز می توان رسم کرد؟



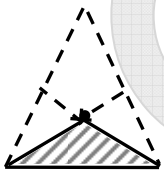
باید توجه داشت که دو مثلث وقتی متمایزند که حداقل یکی از اجزاء آنها متفاوت باشد، مثلاً دو مثلث زیر متمایز نیستند و در شمارش یکبار محاسبه می‌شوند.

حال به بررسی چند حالت از مهمترین حالات رسم مثلث می پردازیم:

۱- با معلوماتی که دو مثلث با هم برابر می‌شوند (ض ز ض، ض ض ض، ز ض ز و همچنین دو ضلع و زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر) حداکثر یک مثلث منحصر به فرد مشخص می‌شود.

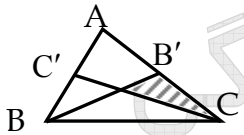
حالات خاص: در کلیه‌ی حالات زیر با رسم مثلث هاشورخورده، می‌توانیم مثلث اصلی را رسم کنیم.

۱- مثلث را با معلوم بودن اندازه ضلع $BC=a$ و میانه‌های $BB'=m_b$ و $CC'=m_c$ می‌توان رسم کرد.



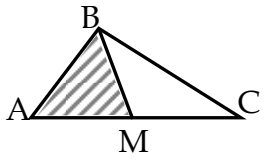
در واقع اگر مثلثی که اضلاع آن $\frac{2}{3}\mathbf{m_b}$ و $\frac{2}{3}\mathbf{m_c}$ و a باشد، موجود و قابل رسم باشد، می‌توان بر اساس آن مثلث اولیه را نیز که اضلاعش a و b و c هستند ترسیم نمود.

۲- مثلث را با معلوم بودن اندازه ضلع $AC=b$ و میانه‌های $BB'=m_b$ و $CC'=m_c$ می‌توان رسم کرد.



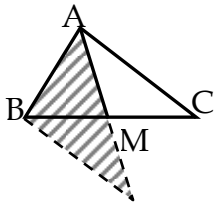
در واقع اگر مثلثی که اضلاع آن $\frac{1}{3}\mathbf{m_b}$ و $\frac{2}{3}\mathbf{m_c}$ و $\frac{b}{2}$ است، موجود و قابل رسم باشد، می‌توان بر اساس آن مثلث اولیه را نیز رسم کرد.

۳- مثلث را با معلوم بودن اندازه ضلع $AC=b$ و $AB=c$ و میانه‌ی $BM=m_b$ می‌توان رسم کرد.



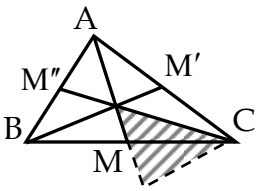
در واقع اگر مثلثی که اضلاع آن $\mathbf{m_b}$ و $\frac{b}{2}$ و c است، موجود و قابل رسم باشد، می‌توان بر اساس آن مثلث اولیه را نیز رسم کرد.

٤- مثلث را با معلوم بودن اندازه ضلع $AC=b$ و $AB=c$ و میانه‌ی $AM=m_a$ می‌توان رسم کرد.



در واقع اگر مثلثی که اضلاع آن b و c و $\mathbf{2m_a}$ است، موجود و قابل رسم باشد، می‌توان بر اساس آن مثلث اولیه را نیز رسم کرد.

۵- مثلث را با معلوم بودن اندازه سه میانه می‌توان رسم کرد.

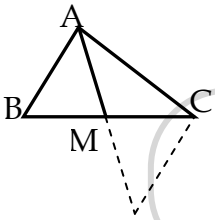


در واقع اگر مثلثی که اضلاع آن $\frac{۲}{۳}m_a$ و $\frac{۲}{۳}m_b$ و $\frac{۲}{۳}m_c$ است، موجود و قابل رسم باشد، مثلث اولیه نیز قابل رسم است.

مثال: در رسم مثلّث ABC با معلوم بودن دو ضلع $c=۴, b=۶$ و میانه‌ی $m_a=۴$ با خط کش و پرگار کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیر قابل رسم ۲) جواب منحصر به فرد ۳) دو جواب متمایز ٤) فاقد جواب

حل:



باید مثلث هاشورخورده قابل رسم باشد، پس داریم:

$$|b-c| \le ۲m_a \le b+c \rightarrow ۲ \le ۲m_a \le ۱۰ \rightarrow ۱ \le m_a \le ۵$$

لذا چون $۱ \le ۴ \le ۵$ است پس جواب منحصر بفرد است.

مثال: از مثلث قائم الزاویه ای طول وتر آن مشخص است. با معلوم بودن اندازه کدام جزء دیگر، این مثلث قابل رسم نخواهد بود؟

۱) ارتفاع وارد بر وتر ۲) ارتفاع وارد بر ضلع قائم ۳) میانه وارد بر وتر ٤) یک زاویه‌ی حاده

حل:

میانه‌ی وارد بر وتر نصف وتر است، در واقع اطلاع جدیدی به دست نیامده است. و هنوز ۲ تا جزء مستقل در دست داریم.

مثال: چند مثلث قائم الزاویه دو به دو ناهمنهشت با وتر ۵ سانتیمتر وجود دارد که اندازه های زوایای آن اعداد طبیعی باشند؟

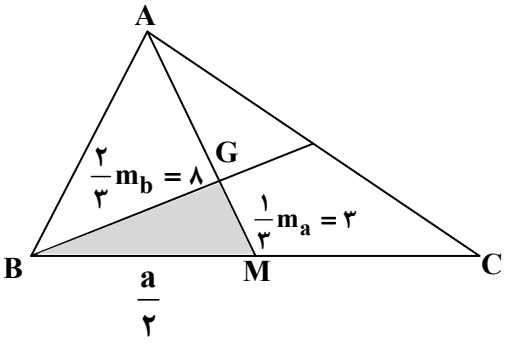
حل:

زاویه‌های غیر قائمه می توانند از ۱ تا ٤۵ تغییر کنند. لذا ٤۵ مثلث قابل رسم است.

مثال: مثلثی با معلوم بودن دو میانه‌ی $m_a=۹$ و $m_b=۱۲$ و ضلع a قابل رسم است. اندازه‌ی a کدام عدد می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ۲) ۹ ۳) ۱۵ ٤) ۲۲

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



مثلث BGM با معلم بودن سه ضلع باید قابل رسم باشد، پس باید:

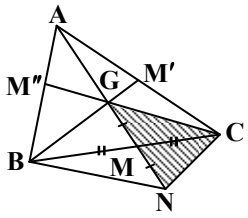
$$۸-۳<\frac{a}{۲}<۸+۳ \Rightarrow ۱۰<a<۲۲$$

در گزینه‌ها تنها $a=۱۵$ قابل قبول است.

مثال: از مثلث ABC میانه‌های $m_a = ۳$ و $m_b = ۵$ معلومند. m_c کدام باشد تا بتوان مثلث ABC را رسم کرد؟

۱) $m_c = ۹$ ۲) $m_c = ۱/۵$ ۳) $m_c = ۵$ ٤) $m_c = ۱$

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



اگر میانه GM را از طرف M به اندازه خودش امتداد دهیم، مثلثی به دست می‌آید که اضلاعش $\frac{۲}{۳}m_a, \frac{۲}{۳}m_b, \frac{۲}{۳}m_c$ است. (چون $\begin{matrix}BM = CM\\ GM = MN\end{matrix}$ پس BGCN متوازی‌الاضلاع است، لذا $BG = CN$)

حال اگر این مثلث رسم شود، مثلث اولیه نیز قابل رسم خواهد بود. شرط وجود این مثلث این است که:

$$\frac{۲}{۳}|m_b - m_a| < \frac{۲}{۳}m_c < \frac{۲}{۳}(m_a + m_b)$$

$$۲ < m_c < ۸$$

۲- رسم مثلث با معلومات دو ضلع و زاویه‌ی غیر بین:

اگر از مثلثی دو ضلع و زاویه‌ی غیر بین معلوم باشد دو حالت امکان پذیر است:

۱- زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر است: در این حالت تنها یک مثلث قابل رسم است،چون این حالت جزء حالت تساوی دو مثلث است.

۲- زاویه‌ی داده شده روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر است: در این حالت برای پیدا کردن تعداد حالات ممکن از قضیه‌ی سینوس‌ها استفاده می‌کنیم مثلاً اگر a و b و $\hat{B}$ معلوم باشد، می‌نویسیم:

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{a\sin\hat{B}}{b} \begin{cases} >۱ & \text{فاقد جواب} \\ =۱ & \text{یک مثلث} \\ <۱ & \text{حداکثر دو مثلث} \end{cases}$$

حالت خاص: در مثلث قائم الزاویه با معلوم بودن وتر و یک ضلع زاویه‌ی قائمه مثلث به صورت منحصر بفرد قابل رسم است.

مثال: با معلومات $a = ۶\sqrt{۳}$, $b = ۶$, $\hat{A} = ۶۰$ چند مثلث مشخص می‌شود؟

حل:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{۶\sqrt{۳}}{\sin ۶۰} = \frac{۶}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{۱}{۲} \rightarrow B = ۳۰^\circ$$

جواب $B = ۱۵۰^\circ$ غیر قابل قبول است چون مجموع زوایای داخلی از ۱۸۰ فراتر می رود، پس فقط ۱ مثلث مشخص می‌شود.

مثال:چند مثلث متفاوت می‌توان رسم کرد که اندازه‌ی یکی از زاویه‌های آن ٤۵° باشد و اندازه‌های دو تا از اضلاع آن ٦,۵ باشد؟

حل:

اگر $c = ۵, b = ۶, \hat{A} = ۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه یک مثلث منحصر به فرد می‌توان رسم کرد.

اگر $c = ۵, b = ۶, \hat{B} = ۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه طبق قضیه سینوسها: $\frac{۶}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۵}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \sin\hat{C} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۱۲}$ که در این حالت $\hat{C} = ۱۴۴^\circ$ یا $\hat{C} \approx ۳۶^\circ$ است که حالت $\hat{C} = ۱۴۴^\circ$ غیر قابل قبول است.

چون مجموع زوایای داخلی مثلث را بیش از ۱۸۰° می‌کند، لذا در این حالت نیز یک مثلث منحصر به‌فرد قابل رسم است.

اگر $c = ۵, b = ۶, \hat{C} = ۴۵^\circ$ باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه سینوس‌ها: $\frac{۵}{\sin ۴۵^\circ} = \frac{۶}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \sin\hat{B} = \frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$ که در این حالت $\hat{B} = ۱۲۲^\circ$ یا $\hat{B} \approx ۵۸^\circ$ است که هر دو حالت قابل قبول است.

پس در مجموع چهار مثلث با این داده‌ها می‌توان رسم کرد.

مؤسسه آموزشی فرهنگی

مثال: با معلومات $\hat{A}=\frac{\pi}{۳}$ و $b=\sqrt{۲}a$ چند مثلث می توان رسم نمود؟

حل:

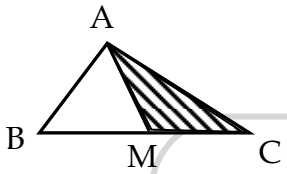
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\rightarrow\frac{a}{\sin\frac{\pi}{۳}}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{۲}a}{\sin B}\rightarrow \sin B=\frac{\sqrt{۶}}{۲}>۱$$

که غیر ممکن است پس مسأله فاقد جواب است.

مثال: با معلومات $a=۴$, $\hat{C}=۳۰$, $m_a=۳$ چند مثلث می توان رسم نمود؟

حل:

اگر مثلث هاشور خورده را رسم کنیم، مثلث اصلی نیز قابل رسم است.



$$\frac{m_a}{\sin C}=\frac{\frac{a}{۲}}{\sin A_۱}\rightarrow\frac{۳}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{\sin A_۱}\rightarrow \sin A_۱=\frac{۱}{۳}$$

پس یک جواب قابل قبول است، چون زاویه به دست آمده کمتر از ۳۰ درجه است، پس مکملش بیشتر از ۱۵۰ درجه است که با وجود زاویه‌ی **۳۰°** غیرقابل قبول است.

۳- رسم مثلث با معلومات دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم: (h_a,c,b)

اگر از مثلث ABC دو ضلع (مثلاً b و c) و ارتفاع وارد بر ضلع سوم (یعنی $\mathbf{h_a}$) معلوم باشد، چند حالت ممکن است رخ دهد:

۱- اگر $b\neq c$ باشد چون $h_a<c, h_a<b$ می‌باشد، دو مثلث به دست می‌آید ؛ که یکی حاده الزاویه و یکی منفرجه الزاویه است.

۲- اگر $h_a<b=c$ باشد یا $h_a=b<c$ باشد (دو ضلع برابر یا ارتفاع برابر ضلع کوچک‌تر باشد) دقیقاً یک مثلث (در حالت اول متساوی الساقین و در حالت دوم قائم الزاویه) به دست می‌آید.

۳- در غیر این صورت جوابی برای مسأله وجود ندارد.

مثال: با معلومات $c=۳, b=۲, h_a=۱$ (دو ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع سوم) چند مثلث متمایز می توان رسم کرد؟

حل:

اضلاع **c,b** می‌توانند دو طرف ارتفاع $\mathbf{h_a}$ باشند یا می‌توانند در یک طرف ارتفاع $\mathbf{h_a}$ قرار داشته باشند. پس ۲ حالت قابل رسم است:



مثال: با معلومات $a=۲$ و $b=۵$ و $h_c=۲$ چند مثلث قابل رسم است؟

حل:

چون $\mathbf{h_c=a}$ فقط یک مثلث می توان رسم کرد که آن، هم قائم الزاویه است.

۴- رسم مثلث با معلومات دو ضلع و ارتفاع وارد بر یکی از همان اضلاع : (h_a,b,a)

در این صورت چند حالت ممکن است رخ دهد:

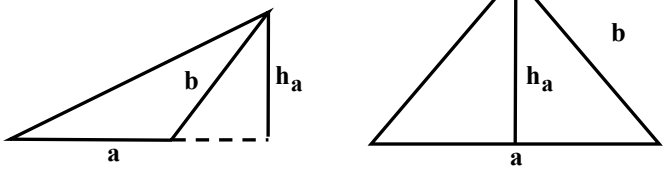
در صورتی که $\mathbf{h_a<b}$ باشد، دو مثلث و اگر $\mathbf{h_a=b}$ باشد یک مثلث قائم الزاویه و در غیر این صورت هیچ مثلثی قابل رسم نیست.

موسسه آموزشی فرهنگی

مثال: با اطلاعات $a=۸$ و $b=۶$ و $h_a=۵$ چند مثلث قابل رسم است؟

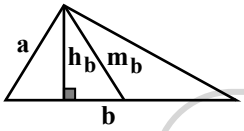
حل:

چون $b>h_a$ است، پس دو مثلث می توان رسم کرد.

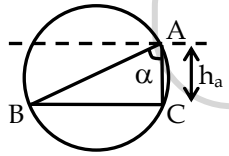


۵- رسم مثلث با معلومات یک ضلع و میانه و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر (m_b, h_b, a):

در این صورت چند حالت ممکن است رخ دهد: در صورتی که ارتفاع از ضلع و میانه کوچک‌تر باشد دو جواب دارد ؛ و اگر با عدد کوچک‌تر بین آن دو برابر شود یک جواب بیش‌تر ندارد و در غیر این صورت فاقد جواب است.



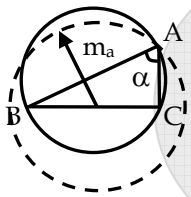
۶- رسم مثلث با معلومات یک ضلع و زاویه و ارتفاع نظیر آن ضلع $(\hat{A}, h_a, a)$:



در این صورت مسأله در صورتی جواب دارد که کمان در خور زاویه‌ی A رو به پاره خط BC و خطی که به موازات BC وبه فاصله‌ی h_a از آن رسم می‌شود یکدیگر را قطع کنند.

۷- رسم مثلث با معلومات یک ضلع و زاویه و میانه‌ی نظیر آن ضلع $(\hat{A}, m_a, a)$:

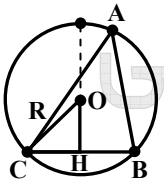
در این صورت مسأله در صورتی جواب دارد که کمان در خور زاویه‌ی A رو به پاره خط BC و دایره ای که به مرکز وسط BC و شعاع m_a رسم می‌شود، یکدیگر را قطع کنند.



مثال: اگر در مثلث ABC، $\hat{A}=۳۰^\circ$ و $a=۶$، m_a کدام باشد تا مثلث قابل رسم باشد؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ٤) ۱۲

حل: گزینه ۲ پاسخ است.



$$R=\frac{a}{۲\sin A}=\frac{۶}{۲\sin ۳۰}=۶$$

$$OH=\frac{a}{۲\tan A}=\frac{۶}{۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲\sqrt{۳}$$

لذا باید: $\frac{a}{۲}<m_a<OH+R$ باشد تا مثلث قابل رسم باشد.

$$۳<m_a<۲\sqrt{۳}+۶\cong ۲\times ۱/۷+۶\cong ۹/۴$$

در بین گزینه‌ها $m_a=۷$ قابل قبول است.